

Zasada pudełkowania Dirichleta - zadania dodatkowe

1. Udowodnij, że wśród dowolnych 2022 liczb całkowitych są trzy: a, b, c , takie, że $2022 \mid (a - b)c$.
2. Udowodnij, że w dowolnym 25-elementowym podzbiorze zbioru $\{1, 2, \dots, 45\}$ istnieją dwie liczby różniące się dokładnie o 4.
3. Udowodnij, że z grupy 9 osób w wieku od 1 do 55 da się wybrać dwie rozłączne podgrupy o tej samej sumie wieku.
4. Danych jest 12 różnych liczb dwucyfrowych. Pokaż, że wśród nich istnieją dwie, których różnica jest postaci aa , gdzie a jest cyfrą.
5. Niech A będzie 20-elementowym podzbiorem zbioru $\{1, 4, 7, \dots, 100\}$. Udowodnij, że w A znajdują się dwie różne liczby, które sumują się do 104.
6. Udowodnij, że spośród 65 liczb naturalnych da się wybrać 9 takich, których suma jest podzielna przez 9.
7. W trójkącie równobocznym o boku 4 wybrano pięć punktów. Wykaż, że odległość pewnych dwóch z nich jest nie większa niż 2.
8. Udowodnij, że wśród 13 punktów dowolnie wybranych z koła o promieniu 1, trzy tworzą trójkąt o polu nie większym niż $0,6$.
9. Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano na jeden z dwóch kolorów. Udowodnij, że istnieją dwa punkty odległe o 1 w tym samym kolorze.